

Végtelen sorok

Nagy Noémi

Definíció

Definíció: Legyen $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ adott sorozat, ekkor a

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

kifejezést **végtelen sornak**, vagy **numerikus sornak** nevezzük.

Definíció

Definíció: Legyen $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ adott sorozat, ekkor a

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

kifejezést **végtelen sornak**, vagy **numerikus sornak** nevezzük.

Rövid jelölés a végtelen összegre: $\sum a_k$.

Definíció

Definíció: Legyen $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ adott sorozat, ekkor a

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

kifejezést **végtelen sornak**, vagy **numerikus sornak** nevezzük.

Rövid jelölés a végtelen összegre: $\sum a_k$.

Megjegyzés: Ha $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$, akkor a számsorozatból képzett sor:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \dots$$

Definíciók

Definíció: A $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ sor részletösszegein az

$$s_n := a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

számokat értjük. Az $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat a végtelen sor **részletösszeg sorozata**.

Definíciók

Definíció: A $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ sor részletösszegein az

$$s_n := a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

számokat értjük. Az $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat a végtelen sor **részletösszeg sorozata**.

Definíció: Ha a részletösszegekből képzett (s_n) sorozat konvergens és határértéke: $A \in \mathbb{R}$, azaz $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = A$, akkor azt mondjuk, hogy a $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ végtelen sor konvergens, és az összege: A . Ezt úgy jelöljük, hogy $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = A$.

Definíciók

Definíció: A $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ sor részletösszegein az

$$s_n := a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

számokat értjük. Az $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat a végtelen sor **részletösszeg sorozata**.

Definíció: Ha a részletösszegekből képzett (s_n) sorozat konvergens és határértéke: $A \in \mathbb{R}$, azaz $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = A$, akkor azt mondjuk, hogy a $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ végtelen sor konvergens, és az összege: A . Ezt úgy jelöljük, hogy $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = A$.

Definíció: Ha a részletösszegekből képzett (s_n) sorozat divergens (azaz nem konvergens), akkor azt mondjuk, hogy a $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ végtelen sor divergens. Ennek speciális esete, ha $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = +\infty$ (illetve $-\infty$), akkor azt mondjuk, hogy a $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ végtelen sor összege $+\infty$ (illetve $-\infty$). Ezt úgy jelöljük, hogy $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = +\infty$ (illetve $-\infty$).

Definíciók

A részletösszegek (s_n) sorozatának viselkedése szerint az alábbi esetek lehetségesek:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_1 + \dots + a_n) = \begin{cases} A \in \mathbb{R} & (\text{konvergens}) \\ +\infty & (\text{divergens}) \\ -\infty & (\text{divergens}) \\ \nexists & (\text{divergens}) \end{cases}$$

Definíciók

A részletösszegek (s_n) sorozatának viselkedése szerint az alábbi esetek lehetségesek:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_1 + \dots + a_n) = \begin{cases} A \in \mathbb{R} & (\text{konvergens}) \\ +\infty & (\text{divergens}) \\ -\infty & (\text{divergens}) \\ \nexists & (\text{divergens}) \end{cases}$$

Megjegyzés: Ha a sorban véges sok tagot elhagyunk vagy megváltoztatunk, akkor a konvergencia ténye nem változik: konvergens sorból konvergens sort, divergens sorból divergens sort kapunk. A sorösszeg értéke természetesen megváltozik.

Példák

Példa 1: $\sum_{k=1}^{+\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + \dots = ?$

Ekkor

$$s_n = \sum_{k=1}^n 1 = \underbrace{1 + \dots + 1}_{n \text{ darab}} = n$$

Így $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$, azaz $\sum_{k=1}^{+\infty} 1 = +\infty$.

Példák

Példa 1: $\sum_{k=1}^{+\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + \dots = ?$

Ekkor

$$s_n = \sum_{k=1}^n 1 = \underbrace{1 + \dots + 1}_{n \text{ darab}} = n$$

Így $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$, azaz $\sum_{k=1}^{+\infty} 1 = +\infty$.

Példa 2: $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} = 1 + (-1) + 1 + (-1) + \dots = ?$

Ekkor az (s_n) részletösszeg sorozat két speciális részsorozatát tekintve:

$$s_{2n} = \underbrace{1 - 1 + \dots + 1 - 1}_{n \text{ darab } 1\text{-es és } n \text{ darab } (-1)\text{-es}} = 0, \text{ így } \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0,$$

$$s_{2n+1} = \underbrace{1 - 1 + \dots + 1 - 1 + 1}_{n+1 \text{ darab } 1\text{-es és } n \text{ darab } (-1)\text{-es}} = 1, \text{ így } \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1,$$

ami azt jelenti, hogy nem létezik az (s_n) sorozatnak határértéke, azaz $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1}$ divergens.

Konvergencia szükséges feltétele

Tétel (Triviális kritérium)

Ha $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ sor konvergens, akkor $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = 0$.

Konvergencia szükséges feltétele

Tétel (Triviális kritérium)

Ha $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ sor konvergens, akkor $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = 0$.

Bizonyítás.

Legyen a sor összege $A \in \mathbb{R}$, azaz $\lim_{k \rightarrow +\infty} s_k = A$. Mivel

$$a_k = \underbrace{(a_1 + \dots + a_k)}_{s_k} - \underbrace{(a_1 + \dots + a_{k-1})}_{s_{k-1}} = s_k - s_{k-1},$$

ezért $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} s_k - \lim_{k \rightarrow +\infty} s_{k-1} = A - A = 0$. ■

Konvergencia szükséges feltétele

Tétel (Triviális kritérium)

Ha $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ sor konvergens, akkor $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = 0$.

Bizonyítás.

Legyen a sor összege $A \in \mathbb{R}$, azaz $\lim_{k \rightarrow +\infty} s_k = A$. Mivel

$$a_k = \underbrace{(a_1 + \dots + a_k)}_{s_k} - \underbrace{(a_1 + \dots + a_{k-1})}_{s_{k-1}} = s_k - s_{k-1},$$

ezért $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} s_k - \lim_{k \rightarrow +\infty} s_{k-1} = A - A = 0$. ■

Következmény

Ha $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k \neq 0$, akkor a $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ sor divergens.

Konvergencia szükséges feltétele

Tétel (Triviális kritérium)

Ha $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ sor konvergens, akkor $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = 0$.

Bizonyítás.

Legyen a sor összege $A \in \mathbb{R}$, azaz $\lim_{k \rightarrow +\infty} s_k = A$. Mivel

$$a_k = \underbrace{(a_1 + \dots + a_k)}_{s_k} - \underbrace{(a_1 + \dots + a_{k-1})}_{s_{k-1}} = s_k - s_{k-1},$$

ezért $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} s_k - \lim_{k \rightarrow +\infty} s_{k-1} = A - A = 0$. ■

Következmény

Ha $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k \neq 0$, akkor a $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ sor divergens.

Példa: A $\sum_{k=1}^{+\infty} \sqrt[k]{k}$ sor divergens, hiszen $\sqrt[k]{k} \rightarrow 1 \neq 0$.

Műveletek sorokkal

Tétel

Ha $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ és $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ konvergens sorok, továbbá $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = A$ és $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k = B$, akkor

- $\sum_{k=1}^{+\infty} (a_k + b_k)$ is konvergens és $\sum_{k=1}^{+\infty} (a_k + b_k) = A + B$,
- $\sum_{k=1}^{+\infty} (a_k - b_k)$ is konvergens és $\sum_{k=1}^{+\infty} (a_k - b_k) = A - B$, és
- $\sum_{k=1}^{+\infty} ca_k$ is konvergens és $\sum_{k=1}^{+\infty} ca_k = cA$, ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

Műveletek sorokkal

Tétel

Ha $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ és $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ konvergens sorok, továbbá $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = A$ és $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k = B$, akkor

- $\sum_{k=1}^{+\infty} (a_k + b_k)$ is konvergens és $\sum_{k=1}^{+\infty} (a_k + b_k) = A + B$,
- $\sum_{k=1}^{+\infty} (a_k - b_k)$ is konvergens és $\sum_{k=1}^{+\infty} (a_k - b_k) = A - B$, és
- $\sum_{k=1}^{+\infty} ca_k$ is konvergens és $\sum_{k=1}^{+\infty} ca_k = cA$, ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

Bizonyítás.

A határértéknél tanult tételek alapján látszik. ■

Hiperharmonikus sor

Tétel

Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$ rögzített valós szám. Ekkor a

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots$$

ún. **hiperharmonikus sor**

- *divergens*, ha $\alpha \leq 1$ és az összege: $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = +\infty$,
- *konvergens*, ha $\alpha > 1$.

Hiperharmonikus sor

Tétel

Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$ rögzített valós szám. Ekkor a

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots$$

ún. *hiperharmonikus sor*

- *divergens*, ha $\alpha \leq 1$ és az összege: $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = +\infty$,
- *konvergens*, ha $\alpha > 1$.

Példa 1: A harmonikus sor $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$ divergens.

Példa 2: A szuperharmonikus sor $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots$ konvergens.

Geometriai sor

Definíció: Legyen $q \in \mathbb{R}$ rögzített valós szám. Ekkor a

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = 1 + q + q^2 + \dots$$

végtelen sort **geometriai sornak**, vagy **mértani sornak** nevezzük.

Geometriai sor

Definíció: Legyen $q \in \mathbb{R}$ rögzített valós szám. Ekkor a

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = 1 + q + q^2 + \dots$$

végtelen sort **geometriai sornak**, vagy **mértani sornak** nevezzük.

Megjegyzés: Indulhat $k = 0$ helyett $k = 1$ -től, $k = 2$ -től is, stb.

Geometriai sor konvergenciája

Tétel

A geometriai sor konvergenciáját vizsgálva az alábbi esetek lehetségesek:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = 1 + q + q^2 + \dots = \begin{cases} \frac{1}{1-q}, & \text{ha } |q| < 1 \\ +\infty, & \text{ha } q \geq 1 \\ \nexists, & \text{ha } q \leq -1 \end{cases}$$

Geometriai sor konvergenciája

Tétel

A geometriai sor konvergenciáját vizsgálva az alábbi esetek lehetségesek:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = 1 + q + q^2 + \dots = \begin{cases} \frac{1}{1-q}, & \text{ha } |q| < 1 \\ +\infty, & \text{ha } q \geq 1 \\ \nexists, & \text{ha } q \leq -1 \end{cases}$$

Bizonyítás.

A $|q| < 1$ esetet bizonyítjuk:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1})}_{\text{az első } n \text{ darab tag összege}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{1 - q},$$

mert $q^n \rightarrow 0$, ha $|q| < 1$. ■

Geometriai sor konvergenciája

Tétel

Ha $|q| < 1$, akkor

$$\sum_{k=1}^{+\infty} q^k = q(1 + q + q^2 + \dots) = \frac{q}{1 - q}$$

és

$$\sum_{k=m}^{+\infty} q^k = q^m(1 + q + q^2 + \dots) = \frac{q^m}{1 - q}.$$

Illetve, ha $|q| \geq 1$, akkor a fenti sorok divergensek.

Példák

Példa 1: $\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{6}{7}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{6}{7}} = 7$, mert $q = \frac{6}{7}$ és $\left|\frac{6}{7}\right| < 1$.

Példák

Példa 1: $\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{6}{7}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{6}{7}} = 7$, mert $q = \frac{6}{7}$ és $\left|\frac{6}{7}\right| < 1$.

Példa 2: $\sum_{k=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^k = \frac{-\frac{1}{4}}{1-(-\frac{1}{4})} = \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{5}{4}} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{4}{5} = -\frac{1}{5}$, mert $q = -\frac{1}{4}$ és $\left|-\frac{1}{4}\right| < 1$.

Példák

Példa 1: $\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{6}{7}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{6}{7}} = 7$, mert $q = \frac{6}{7}$ és $\left|\frac{6}{7}\right| < 1$.

Példa 2: $\sum_{k=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^k = \frac{-\frac{1}{4}}{1-(-\frac{1}{4})} = \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{5}{4}} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{4}{5} = -\frac{1}{5}$, mert $q = -\frac{1}{4}$ és $\left|-\frac{1}{4}\right| < 1$.

Példa 3: $\sum_{k=5}^{+\infty} 0,2^k = \frac{0,2^5}{1-0,2} = 0,0004$, mert $q = 0,2$ és $|0,2| < 1$.

Példák

Példa 1: $\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{6}{7}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{6}{7}} = 7$, mert $q = \frac{6}{7}$ és $\left|\frac{6}{7}\right| < 1$.

Példa 2: $\sum_{k=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^k = \frac{-\frac{1}{4}}{1-(-\frac{1}{4})} = \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{5}{4}} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{4}{5} = -\frac{1}{5}$, mert $q = -\frac{1}{4}$ és $\left|-\frac{1}{4}\right| < 1$.

Példa 3: $\sum_{k=5}^{+\infty} 0,2^k = \frac{0,2^5}{1-0,2} = 0,0004$, mert $q = 0,2$ és $|0,2| < 1$.

Példa 4: $\frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \frac{1}{81} + \dots = ?$

Vegyük észre, hogy

$\frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \frac{1}{81} + \dots = (-1) \sum_{k=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^k = (-1) \frac{-\frac{1}{3}}{1-(-\frac{1}{3})} = \frac{1}{4}$, mert $q = -\frac{1}{3}$ és $\left|-\frac{1}{3}\right| < 1$.

Példák

Példa 5: $\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{7}{6}\right)^k = +\infty$, mert $q = \frac{7}{6}$ és $q \geq 1$.

Példák

Példa 5: $\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{7}{6}\right)^k = +\infty$, mert $q = \frac{7}{6}$ és $q \geq 1$.

Példa 6: $\sum_{k=0}^{+\infty} \left(-\frac{75}{10}\right)^k$ divergens és nincs összege, mert $q = -\frac{75}{10}$ és $q \leq -1$.

Példák

Példa 5: $\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{7}{6}\right)^k = +\infty$, mert $q = \frac{7}{6}$ és $q \geq 1$.

Példa 6: $\sum_{k=0}^{+\infty} \left(-\frac{75}{10}\right)^k$ divergens és nincs összege, mert $q = -\frac{75}{10}$ és $q \leq -1$.

Példa 7: $\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{7}\right)^{2k-1} = \left(\frac{2}{7}\right)^{-1} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\left(\frac{2}{7}\right)^2\right)^k = \frac{7}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{4}{49}\right)^k = \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{4}{49}} = \frac{7}{2} \cdot \frac{49}{45} = \frac{343}{90}$, mert $q = \frac{4}{49}$ és $\left|\frac{4}{49}\right| < 1$.

Példák

Példa 5: $\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{7}{6}\right)^k = +\infty$, mert $q = \frac{7}{6}$ és $q \geq 1$.

Példa 6: $\sum_{k=0}^{+\infty} \left(-\frac{75}{10}\right)^k$ divergens és nincs összege, mert $q = -\frac{75}{10}$ és $q \leq -1$.

Példa 7: $\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{7}\right)^{2k-1} = \left(\frac{2}{7}\right)^{-1} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\left(\frac{2}{7}\right)^2\right)^k = \frac{7}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{4}{49}\right)^k = \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{4}{49}} = \frac{7}{2} \cdot \frac{49}{45} = \frac{343}{90}$, mert $q = \frac{4}{49}$ és $\left|\frac{4}{49}\right| < 1$.

Példa 8: $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1-3^{k+1}}{10^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{10^k} - 3 \cdot \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{10}\right)^k = \frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}} - 3 \cdot \frac{\frac{3}{10}}{1-\frac{3}{10}} = \frac{1}{9} - \left(-\frac{9}{7}\right) = -\frac{74}{63}$, ugyanis $\left|\frac{1}{10}\right| < 1$ és $\left|\frac{3}{10}\right| < 1$.

Példák

Példa 5: $\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{7}{6}\right)^k = +\infty$, mert $q = \frac{7}{6}$ és $q \geq 1$.

Példa 6: $\sum_{k=0}^{+\infty} \left(-\frac{75}{10}\right)^k$ divergens és nincs összege, mert $q = -\frac{75}{10}$ és $q \leq -1$.

Példa 7: $\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{7}\right)^{2k-1} = \left(\frac{2}{7}\right)^{-1} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\left(\frac{2}{7}\right)^2\right)^k = \frac{7}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{4}{49}\right)^k = \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{4}{49}} = \frac{7}{2} \cdot \frac{49}{45} = \frac{343}{90}$, mert $q = \frac{4}{49}$ és $\left|\frac{4}{49}\right| < 1$.

Példa 8: $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1-3^{k+1}}{10^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{10^k} - 3 \cdot \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{10}\right)^k = \frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}} - 3 \cdot \frac{\frac{3}{10}}{1-\frac{3}{10}} = \frac{1}{9} - \left(-\frac{9}{7}\right) = -\frac{74}{63}$, ugyanis $\left|\frac{1}{10}\right| < 1$ és $\left|\frac{3}{10}\right| < 1$.

Példa 9: $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{2 \cdot 5^k - 7^{2k}}{3 \cdot 6^k} = \frac{2}{3} \sum_{k=2}^{+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^k + \frac{1}{3} \sum_{k=2}^{+\infty} \left(\frac{49}{6}\right)^k$ divergens lesz, mert $\left|\frac{49}{6}\right| \geq 1$, így $\sum_{k=2}^{+\infty} \left(\frac{49}{6}\right)^k = +\infty$.